SECOND DEGRE

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée. Racines, signe, expression de la somme et du produit des racines. Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré. Discriminant. Factorisation éventuelle. Résolution d'une équation du second degré. Signe.	Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée. Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts. Factoriser une fonction polynôme du second degré, en diversifiant les stratégies : racine évidente, détection des racines par leur somme et leur produit, identité remarquable, application des formules générales.	*Démonstration* Résolution de l'équation du second degré.

I. LES FONCTIONS POLYNOMES DU SECOND DEGRE

Une fonction s'appelle une fonction polynôme du second degré lorsque son expression est :
$f(x) = ax^2 + bx + c$, pour tout x réel.

Exemples :

$f(x) = -2x^2 + 5$

$\begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ c = 5 \end{cases}$

$g(x) = \dfrac{3}{x^2} + x - 2$
n'est pas une fonction polynôme du second degré, car la variable est écrite au dénominateur.

$h(x) = \dfrac{1}{3}x^2 + x - 2$

$\begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases}$

La courbe représentative d'une fonction trinôme est une parabole.
Si $a > 0$: $\cup$
Si $a < 0$: $\cap$

<u>Admis</u> : une parabole admet (en repère orthogonal) un axe de symétrie qui passe par le sommet et est parallèle à l'axe (Oy).

<u>Mise sous forme canonique</u> :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

<u>Discriminant</u> (qui établit une séparation) de l'expression $ax^2 + bx + c$: on le note Δ (delta) et il vaut : $\Delta = b^2 - 4ac$

D'où : $f(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$

Forme canonique :

$f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a}$ ce qui revient à : $f(x)=a\left(x-\alpha\right)^2+\beta$ avec $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=-\dfrac{\Delta}{4a}$

II. RESOLUTION DES EQUATIONS DU SECOND DEGRE

1. $\underline{\Delta<0}$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{\oplus}\right]$$

On est dans la situation a² + b² donc pas de factorisation possible et pas de solution à l'équation $f(x)=0$

2. $\underline{\Delta=0}$

alors $f(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\right]$, forme factorisée

$f(x)=0$ si et seulement si $x+\dfrac{b}{2a}=0$ soit $x=-\dfrac{b}{2a}$

La parabole est tangente à l'axe (Ox).

3. $\underline{\Delta>0}$

alors

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2}\right]$$

$$f(x)=\underbrace{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]}_{\textit{FORME FACTORISEE}}$$

$f(x)=0$ a donc deux solutions

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

La factorisation donne donc : $f(x)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$

Exemple : Factoriser :

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3)$

$\Delta = 4 + 12$

$\Delta = 16$

$\Delta > 0$, donc on a deux solutions à l'équation $f(x) = 0$.

$x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{16}}{2} = -3$

$x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{16}}{2} = 1$

La factorisation devient donc : $x^2 + 2x - 3 = 1 \times (x-1)(x+3)$

4. Conclusion

Pour : $\begin{cases} \text{factoriser : } ax^2 + bx + c \\ \text{résoudre : } ax^2 + bx + c = 0 \end{cases}$ on pose : $\begin{cases} a = \\ b = \\ c = \end{cases}$

Puis on calcule : $\Delta = b^2 - 4ac$ et on travaille suivant le signe de Δ.

III. INEQUATIONS DU SECOND DEGRE

1. Règle des signes

Quel est le signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$ lorsque x décrit ~ .

a) $\Delta > 0$

$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$x - x_1$	-	0	+		+
$x - x_2$	-		-	0	+
Produit $(x-x_1)(x-x_2)$	+	0	-	0	+
Conclusion : Signe de $ax^2 + bx + c$	Même signe que *a*	0	Signe contraire de *a*	0	Même signe que *a*

Définition

Les réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = f(x_2) = 0$ s'appellent les **racines** du trinôme.

Règle :

Le trinôme ax^2+bx+c $(\Delta>0)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et est du signe contraire de a à l'intérieur des racines.

b) $\underline{\Delta=0}$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$x-x_1$		$+$	0	$+$	
Signe de ax^2+bx+c		Même signe que a	0	Même signe que a	

c) $\underline{\Delta<0}$

$$ax^2+bx+c=a\underbrace{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\underbrace{-\frac{\Delta}{4a^2}}_{+}\right]}_{+}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	Le même signe que a	

2. **<u>Méthode pour résoudre une inéquation du second degré</u>**

- calculer Δ et éventuellement x_1 et x_2
- dresser le tableau de signes à l'aide des règles du **1.**
- Conclure

<u>Exemple</u>

$2x^2+6x-3>0$

$$\begin{cases} a=2 \\ b=6 \\ c=-3 \end{cases}$$

$\Delta=36+24=60$

$\sqrt{\Delta}=2\sqrt{15}$

$\Delta>0$

donc

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-6-2\sqrt{15}}{4}=\dfrac{-3-\sqrt{15}}{2} \\ x_2=\dfrac{-3+\sqrt{15}}{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$2x^2+6x-3$		$+$	0	-	0	$+$	

Conclusion :

$$S=\left]-\infty;\frac{-3-\sqrt{15}}{2}\right[\cup\left]\frac{-3+\sqrt{15}}{2};+\infty\right[$$

<u>Exemple</u>

$2x^2+x+5<0$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 5 \end{cases}$$

$\Delta = 1 - 40 = -39 < 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$2x^2 + x + 5$	$+$

Conclusion : il n'y a pas de solution à cette inéquation.

IV. LES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

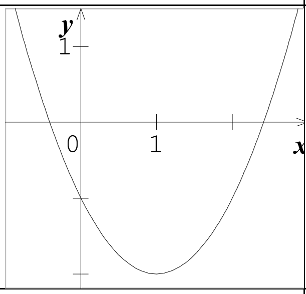
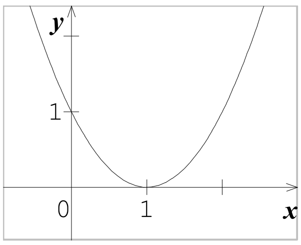
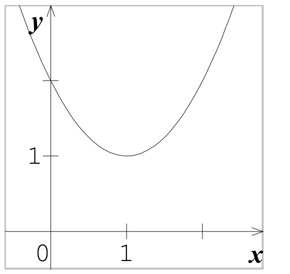
$f : x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$ sont les types de fonctions dont la représentation graphique est une parabole.

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left(x - \alpha\right)^2 + \beta$$

avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$

Récapitulatif

Signe de Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	Pas de solution
Forme factorisée de f	$a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$	$a\left(x - x_0\right)^2$	Pas de factorisation
Courbe représentative $a > 0$			
Courbe représentative $a < 0$